Hledání druhé odmocniny Newtonovou metodou

Cílem je naprogramovat přibližné určení druhé odmocniny stanoveného čísla $a \in \langle 0, \infty)$. Hledáme $x \in \mathbb{R}$, pro něž platí $x = \sqrt{a}$. Anulováním dostáváme $x^2 - a = 0$. Tím jsme problém hledání druhé odmocniny transformovali na problém hledání kořenu nelineární rovnice. Při výpočtu přibližného řešení hraje roli aproximace původní funkce funkcí jednodušší. Použijeme Taylorova rozvoje

$$f(x) \;=\; f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x), \tag{1}$$

kde $f(x)$ je původní funkce, $f'(x)$ její derivace, x_0 je bod dost blízký x a $R(x)$ je zbytek po druhém členu. Nyní můžeme stanovit iterační vzorec pro řešení nelineární rovnice. Předpokládejme, že x je kořen, tedy $f(x) = 0$. Odtud

$$0 \;=\; f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \tag{2}$$

$$x - x_0 \;=\; -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \tag{3}$$

$$x \;=\; x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \tag{4}$$

Vztah (4) lze interpretovat tak, že dosadíme-li za x_0 *odhad řešení* x_i, použitím vzorce obdržíme nový odhad x_{i+1}. Induktivně bychom takto mohli získat celou *posloupnost odhadů řešení*. Použitím vztahu (4) a funkce $f(x) = x^2 - a = 0$ dostáváme

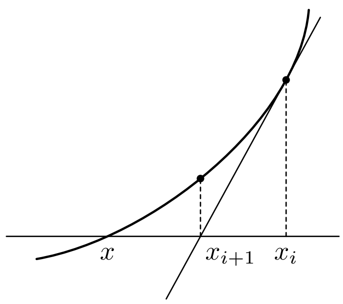
$$x_{i+1} \;=\; x_i - \frac{x_i^2 - a}{2x_i} \;=\; \frac{x_i^2 + a}{2x_i} \;=\; \frac{x_i + \dfrac{a}{x_i}}{2}, \tag{5}$$

kde x_i je odhad řešení a x_{i+1} je nový odhad řešení.

Je zejména vhodné, aby byl iterativní proces konvergentní. Jinak řečeno, odchylka od skutečného řešení by se měla s každou iterací zmenšovat. V ideálním případě konverguje posloupnost řešení ke skutečnému řešení. Pokud je funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ dvakrát spojitě diferencovatelná, $f''(x)$ nemění znaménko $\forall x \in \langle a, b\rangle$ a na daném intervalu $\langle a, b\rangle$ řešení existuje, pak je iterativní proces konvergentní.

Pro funkci $f(x) = x^2 - a = 0$ je $f''(x) = 2$, to jest iterativní proces je konvergentní a řešení náleží intervalu $\langle 0, a)$. Tato podmínka je splněna pro $a \in \langle 0, \infty)$ libovolné.

Geometrický význam Newtonovy metody plyne rovněž ze vztahu (4). V bodě odhadovaného výsledku je vedena tečna ke grafu funkce. V průsečíku tečky s osou x je nový odhad řešení.



Analogicky jako jsme odvodili vztah (5) pro výpočet druhé odmocniny lze odvodit i vztah pro výpočet třetí odmocniny. I v tomto případě je výpočetní proces konvergentní, protože pro řešení na intervalu $\langle 0, a)$ druhá derivace $(x^3 - a)'' = 6x$ nemění znaménko.

$$x_{i+1} \;=\; x_i - \frac{x_i^3 - a}{3x_i^2} \;=\; \frac{2x_i^3 + a}{3x_i^2} \;=\; \frac{2x_i + \dfrac{a}{x_i^2}}{3}. \tag{6}$$